УДК 372.851
ББК 74.262

Евсеева А.А.
МБОУ «Лицей №1», г. Чистополь,
aleksandra25_10@mail.ru

МЕТОДЫ ЛОГИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Аннотация: в статье рассмотрены различные методы логического доказательства, применяемые в школьном курсе математики. Изложена идея обучения школьников методам логического доказательства в рамках внеурочной деятельности.

Ключевые слова: методы доказательства, математика в школе, методика математики

Каждый человек в своей жизни сталкивается с потребностью аргументировано отстаивать свою току зрения, обосновывать какие-либо утверждения, выдвигать гипотезы и грамотно их доказывать. Доказательство играет существенную роль в любой научной теории. Научное знание обязательно должно быть доказательным. Немаловажна роль доказательства и в социальных сферах: в политике, дипломатии, в судебной практике, в педагогическом и воспитательном процессе.

Ответ на вопрос, заниматься ли развитием логического мышления учащихся, отечественные психологи и методисты давали однозначно положительный, в отличие от зарубежных, например, Ж. Пиаже, отстаивавшего положение о независимости развития логических структур от обучения.

Методист И.А. Гибш, выделяя аспекты проблемы развития логического мышления, подчеркивал необходимость формирования умений учащихся по использованию суждений и умозаключений с целью получения новых умозаключений на основании правил вывода и законов логики, а так же применению различных приемов доказательств.

В недалеком прошлом крайнюю точку зрения в плане развития логического мышления учащихся отстаивал методист А.А. Столяр, который считал необходимым на определенном этапе обучения знакомить учащихся с элементами математической логики.

Мы придерживаемся мнения, что формирование умения логически мыслить, аргументировать свою точку зрения и применять различные методы доказательства, в том числе средствами логического вывода, а также развитие логических структур посредством математических знаний является необходимым условием образования, особенно в условия применения ФГОС.

Задача развития логического мышления учащихся ставится и определенным образом решается в общей школе, но существующее положение дел в усвоении норм логического мышления не может считаться удовлетворительным. Так многие учащиеся, выпускники основной школы, допускают различные логические ошибки при определении понятий, их классификации, путают прямую и обратную теоремы, свойства и признаки понятий, не умеют подводить под определение, не умеют строить отрицание высказываний и т. д. Таким образом, существует необходимость в процессе обучения обращать специальное внимание на развитие логического мышления.

Рассмотрим тематическое планирование для различных УМК, используемых в основной школе, работающей по ФГОС ООО, для классов, нацеленных на повышенный уровень математической подготовки учащихся.

5-6 классы из расчета 6 часов математики в неделю [4]:

	Количество часов			
УМК / Тема	Н.Я. Виленкина и др.	Г.В. Дорофеева и др.	С.М. Никольского и др.	Л.Г. Петерсон и др.
Математический язык и логика	-	3	2	33

7-9 классы из расчета 4 часа алгебры в неделю [1]:

	Количество часов				
УМК / Тема	Ш.А. Алимова и др.	Г.В. Дорофеева и др.	Ю.Н. Макарычева и др.	А.Г. Мордковича и др.	С.М. Никольского и др.
Математический язык. Математическая логика. Методы логического доказательства	2	4	-	2	2

Проведя сравнительный анализ, можно сделать вывод об отсутствии или присутствии лишь незначительного материала по обучению методам логического доказательства в учебниках математики и алгебры 5-9 классов (исключение составляет лишь УМК Л. Г. Петерсон). Конечно, многие идеи доказательства встречаются в задачном материале учебников и в учебниках геометрии, но на должном уровне, на наш взгляд, они не изучаются.

В связи с вышеизложенным, мы предлагаем дополнительно знакомить школьников с некоторыми понятиями, формирующими умение логически мыслить в рамках внеурочной работы по предмету.

Рассмотрим подробнее методы логического доказательства, используемые неявно в рамках школьной программы.

1. Прямое рассуждение: предусматривает применение только непосредственного дедуктивного вывода из считающихся верными утверждений.

Пример 1.1. Докажите, что в равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) углы при основании равны.

Пример 1.2. Докажите, что разность чётного и нечётного числа – число нечётное.

Пример 1.3. Барон Мюнхаузен утверждал, что ему удалось найти такое натуральное число, произведение всех цифр которого равно 6552. Покажи, что он сказал неправду.

2. Обратное рассуждение: предполагаем, что высказывание В («заключение») ложно и показываем ошибочность А («условия»).

Пример 2. Какое наибольшее число острых углов может быть в выпуклом многоугольнике?

Указание: Легко показать, что три острых угла в многоугольнике быть может (например, в треугольнике). Все попытки построить какой-нибудь выпуклый n-угольник с четырьмя острыми углами оказываются тщетными. Возникает гипотеза: максимальное количество острых углов выпуклого многоугольника – три. Доказательство проводиться с помощью утверждения обратного данному: если в многоугольнике максимальное число острых углов больше трех, то он не выпуклый.

3. Доказательство от противного: вид доказательства, при котором «доказывание» некоторого суждения (тезиса доказательства) осуществляется через опровержение противоречащего ему суждения – антитезиса.

Пример 3.1. В школе 20 классов. В ближайшем доме живёт 23 ученика этой школы. Докажите, что среди них обязательно найдутся хотя бы два одноклассника.

Указание: Здесь нам следует допустить, что среди 23 соседей нет одноклассников и прийти к противоречию.

Пример 3.2. Методом «от противного» покажите, что решение уравнения $x^2=2$ является иррациональным числом.

Указание: Здесь нам следует допустить, что решение x уравнения $x^2 = 2$ рационально, т. е. записывается в виде $x = \frac{m}{n}$, с целыми m и n, причем $n \neq 0$.

4. Принцип Дирихле. Проще всего принцип Дирихле выражается в такой шуточной форме: «Если в n клетках больше чем n+1 зайцев, то хотя бы в одной клетке сидят не меньше двух зайцев».

Пример 4.1. Пять мальчиков собрали вместе 14 грибов, каждый нашёл хотя бы один гриб. Докажите, что хотя бы два мальчика нашли одинаковое число грибов.

Пример 4.2. Доказать, что среди 101 целого числа всегда можно выбрать два таких, что их разность делится на 100.

Указание: необходимо рассмотреть остатки от деления на 100.

5. Метод математической индукции. Для доказательства сначала проверяется истинность утверждения с номером 1 – база индукции, а затем

доказывается, что, если верно утверждение с номером n, то верно и следующее утверждение с номером $n + 1$ – шаг индукции, или индукционный переход.

Пример 5.1. Докажите, что для любого натурального числа n сумма n первых нечётных натуральных чисел равна n^2.

Пример 5.2. Докажите по индукции, что $(1+b)^n \geq 1+nb$.

Итак, в связи с вышеизложенным, в 5 классе учащимся дополнительно к учебному материалу мы предлагаем:

• поработать с математическими выражениями и научиться переводить условие задачи на математический язык;

• сформировать умение применять при решении нестандартных задач метода проб и ошибок и метода полного перебора;

• познакомиться с понятиями высказывания, общими утверждениями и утверждениями вида «хотя бы один»;

• получить представление о доказательстве утверждений (необходимо сделать основной упор на доказательство математических утверждений в общем виде и научиться использовать доказательство прямым рассуждением);

• изучить понятие равносильности и усвоить, что при решении задачи необходимо переходить к рассмотрению равносильной ей математической модели.

Помимо этого необходимо показать учащимся применение полученных правил составления математических моделей и доказательства утверждений при решении сюжетных логических задач, задач про рыцарей и лжецов, задач на взвешивания, переливания и пр. [8]

В 6 классе школьников нужно познакомить с понятием отрицания, а также рассмотреть утверждения с переменными и применение кванторов существования и всеобщности для записи выражений на математическом языке. В этом же возрасте целесообразно познакомить учащихся с двумя основными методами математического доказательства: *обратным рассуждением, методом «от противного»* и *принципом Дирихле* [5].

В 7 классе следует уделить большее внимание решению логических задач разных типов на применение изученных способов доказательств и познакомить школьников с задачами типа «оценка + пример» [7]. Кроме того, нужно уделить большое внимание применению терминов «необходимо» и «достаточно».

В 8 классе было бы полезно, на наш взгляд, познакомить учащихся с применением разных правил логического вывода для установления истинности высказываний, а также показать применение алгебры логики для решения логических задач математики и информатики [2].

В 9 классе, по нашему мнению, необходимо:

- поработать с последовательностями и закономерностями; научить школьников «угадывать» принцип построения последовательности;
- записывать формулу n–го члена последовательности в общем виде и задавать последовательность рекуррентно;

- дать представление об индукции и дедукции, объяснить метод математической индукции, привести примеры использования метода математической индукции [6];
- показать учащимся историческую значимость метода математической индукции [3].

Мы считаем, что материал внеклассной работы должен способствовать расширению объема сведений по математике, а также обучению школьников навыкам анализа нестандартных ситуаций, самостоятельной работе с литературой, развитию умений логически мыслить, лишь тогда мы сможем говорить о полноценном обучении, соответствующем требованиям ФГОС.

Библиографический список

1. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7–9 классы: пособие для учителей общеобразоват. организаций/ [сост. Т. А. Бурмистрова]. – М.: Просвещение, 2011. 96 с.
2. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – 3-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013. 560 с.
3. Канин, Е. С. Индукция. Метод математической индукции и его эквиваленты / Е. С. Канин // Математика для школьников – 2009. – № 2 – С. 17–20.
4. Математика. Сборник рабочих программ. 5–6 классы: пособие для учителей общеобразоват. организаций/ [сост. Т. А. Бурмистрова]. – 4 изд. – М.: Просвещение, 2015. 80 с.
5. Раскина, И. В. Логические задачи / И. В. Раскина, Д. Э. Шноль. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2015. 120 с.
6. Семенов, В. И. Об искусстве индуктивного предположения / В. И. Семенов // Математика в школе – 1994. – № 2 – С. 21–22.
7. Шаповалов, А. В. Как построить пример? / А. В. Шаповалов. – М.: МЦНМО, 2013. 80 с.
8. Шарыгин, И. Ф. Задачи на смекалку: 5–6 кл. / И. Ф. Шарыгин, А. В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2007. 95 с.